LANDELIJKE INTERUNIVERSITAIRE MATHEMATISCHE OLYMPIADE

LIMO 2013

OPGAVEN

Inhoudsopgave

Colofon
Dit opgavenboekje is een uitgave van de LIMO-commissie 2013.
e-mail: limo@deleidscheflesch.nl
internet: www.limo.deleidscheflesch.nl

Omslagontwerp: Jacob Boon
Opgaven: Frans Oort, Harold de Boer, Gunther Cornelissen Gerhard Woeginger, Hendrik Lenstra, Jaap Top, Quintijn Puite, Rob Tijdeman, Ronald Meester, Sjoerd Boersma, Tom Verhoeff, Arne Smeets

Regels en tips

Tijdens de wedstrijd gelden de volgende **regels**:

- Maak iedere opgave op een apart vel en voorzie deze van teamnaam en opgavenummer. Verzamel het werk per opgave in het daarvoor bestemde mapje.
- Hulpmiddelen zoals boeken, grafische rekenmachines, mobiele telefoons en laptops zijn niet toegestaan. Uiteraard mag er alleen gecommuniceerd worden met teamgenoten en met de organisatie.
- Voor drinken wordt tijdens de wedstrijd gezorgd. Er komt regelmatig iemand langs om vragen aan te kunnen stellen.

Tips die je kunnen helpen tijdens de wedstrijd:

- **Notatie.** Bij diverse opgaven is een definitie gegeven in een voetnoot. Verder wordt met $\mathbb{N}$ de verzameling van strikt positieve gehele getallen bedoeld, dat wil zeggen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
- **Volgorde van moeilijkheid.** We hebben getracht de opgaven op volgorde van moeilijkheid te sorteren. Dat wil zeggen, we denken dat er voor de eerste opgaven gemiddeld meer punten zullen worden gehaald dan voor de latere opgaven. Besteed dus gemiddeld meer tijd aan opgaven met lagere nummers.
- **Lees goed wat er in de opgave staat.** Als je te snel begint, kun je belangrijke informatie over het hoofd zien. Soms staat in de vraagstelling een (verstopte) hint die aangeeft wat je zou kunnen doen. Als je vastloopt, kun je ook besluiten de opgave nog eens goed door te lezen. Zorg ook dat je alle gegeven informatie gebruikt die in de opgave staat en vooral slechts de informatie die gegeven is.
- **Wees een team.** Verdeel de opgaven, zodat je geen dubbel werk doet, en vraag elkaar om hulp als je ergens niet uit komt. Bespreek ook vooraf waar ieders kwaliteiten liggen. Bekijk tijdens de wedstrijd elkaars werk. Vaak vallen er nog foutjes uit te halen.
- **Sprokkel puntjes**. Als je er niet uit komt, schrijf dan op wat je wel hebt bewezen dat relevant kan zijn voor het bewijzen van de betreffende opgave. Als je op de goede weg zat, kun je daar vaak nog deelscores voor krijgen. Sowieso blijkt uit resultaten van voorgaande jaren dat niet vaak voor een opgave alle punten worden gescoord. Als je niet uit een deelopgave komt, mag je het resultaat dat daarin bewezen moest worden, wel gebruiken om de volgende deelopgave op te lossen.
- **Blijf niet vastzitten in verkeerde gedachten.** Het is vaak verstandig een probleem vanuit een ander gezichtspunt te bekijken. Vaak helpt het gegeven termen om te schrijven of gegevens te manipuleren. Als je weinig vooruitgang boekt kun je ook aan een andere opgave gaan werken en iemand anders naar jouw opgave laten kijken.
- **Vind een patroon.** Als je bijvoorbeeld iets moet bewijzen voor alle $n \in \mathbb{N}$, probeer dan kleine gevallen: kijk wat er gebeurt voor $n = 1$ of $n = 2$. Ontdek een patroon en bewijs dat dit patroon doorzet bij grotere getallen.
- **Houd het gezellig.** Het is niet zeker of je er goed van gaat presteren, maar op deze manier heb je in elk geval een leuke dag.

1. Rationale oplossingen

Prof. dr. F.J. (Frans) Oort, Universiteit Utrecht

(a) Bewijs: er bestaan geen $u, v \in \mathbb{Q}$ met $2 = u^2 + 11v^2$

(b) Bewijs: er bestaan oneindig veel $(x, y) \in \mathbb{Q}$ met $23 = x^2 + 11y^2$

Technische Universiteit **Eindhoven** University of Technology

Nagedacht over je carriére?

Gebruik je bachelordiploma Technische Wiskunde en stroom door in de

masteropleiding Industrial and Applied Mathematics (IAM) in Eindhoven, in een high-tech omgeving

Als master of science in IAM speel je een essentiële rol bij nieuwe en innovatieve technologie omdat die steeds vaker gebruik maakt van wiskundige modellen.

Industrial and Applied Mathematics

- **Computational Science and Engineering**
  Complexe natuurkundige en technische processen analyseren en simuleren
- **Discrete Mathematics and Applications**
  Van crystallografische roosters tot optimalisering van netwerken en chips, van computeralgebra tot cryptografische schema's
- **Statistics, Probability, and Operations Research**
  Modellering, analyse en optimalisatie van deterministische en toevallige processen

Meer info: **www.tue.nl/masterprograms/iam**

2. Zak dobbelstenen

Harold de Boer, Transtrend

In een niet-doorzichtige zak zitten twee soorten dobbelstenen. Een fractie p (met $0 < p < 1$) wordt gevormd door de standaard kubussen met op de zijden de getallen 1 tot en met 6. De overige dobbelstenen zijn octaëders met op de zijden de getallen 1 tot en met 7 en op de achtste zijde het gehele getal a. Alle dobbelstenen zijn zuiver.
De stochastische variabele, X, die afhankelijk is van de parameters p, a, M en N wordt gedefinieerd door het volgende kansexperiment.
We trekken blind een dobbelsteen uit de zak. Als dat een kubus is, werpen we M maal met deze dobbelsteen en noteren we het gemiddelde aantal ogen. Als de getrokken dobbelsteen een octaëder is, werpen we N maal met deze dobbelsteen en noteren het gemiddelde van het dan geworpen aantal ogen.
Onder welke voorwaarden convergeert de verdeling van X voor oplopende waardes van M en N naar een normale verdeling.
Kies uit:

(a) In alle gevallen

(b) Alleen voor specifieke waardes voor p, ongeacht de waardes van a, M en N (zolang M en N maar oplopen). Geef het waardebereik van p.

(c) Alleen voor specifieke waardes voor a, ongeacht de waardes van p, M en N (zolang M en N maar oplopen). Geef het waardebereik van a.

(d) Alleen bij een specifieke relatie tussen M en N, ongeacht de waardes van p en a. Geef deze relatie tussen M en N.

(e) Alleen bij specifieke condities aan p en a, ongeacht de waardes van M en N (zolang M en N maar oplopen). Geef deze condities aan p en a.

(f) Alleen bij specifieke condities aan p, M en N, ongeacht de waarde van a. Geef deze condities.

(g) Alleen bij specifieke condities aan a, M en N, ongeacht de waarde van p. Geef deze condities.

(h) Alleen bij specifieke condities aan p, a, M en N. Geef deze condities.

(i) Onder geen enkele voorwaarde

Verklaar hierbij het antwoord.

3. Een functie op bomen

Prof. dr. G.L.M. (Gunther) Cornelissen, Universiteit Utrecht

Stel dat T een samenhangende boom[1] is en $\nu\colon V(T) \to \mathbf{R}$ een functie van de hoekpunten van T naar de reële getallen. Als A een deelverzameling is van $V(T)$, definieer dan

$$\nu(A) := \sum_{x \in A} \nu(x).$$

Neem aan dat $\nu(T) = 1$.

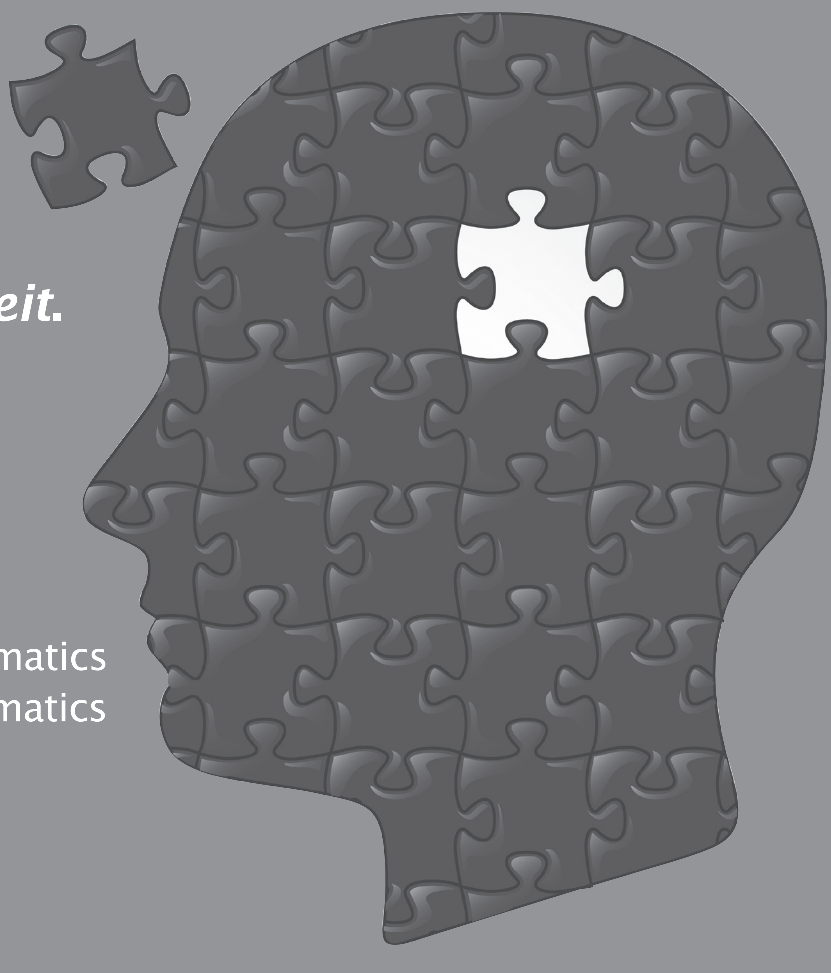
(a) Stel dat $c > 0$ een constante is en dat voor een hoekpunt $x \in V(T)$ geldt dat $\nu(x) < 1 - c\deg(x)$. Toon aan dat $T - x$ minstens één samenhangingscomponent[2] C heeft met $\nu(C) > c$.

(b) Stel dat $c > 0$ een constante is en dat voor *alle* hoekpunten $x \in V(T)$ geldt dat $\nu(x) < 1 - c\deg(x)$. Toon aan dat er een kant $e \in E(T)$ bestaat zodat de twee samenhangingscomponenten $T_1(e)$ en $T_2(e)$ van $T - e$ voldoen aan zowel $\nu(T_1(e)) > c$ als $\nu(T_2(e)) > c$.

[1]

- Een *graaf* G bestaat uit een eindige verzameling $V(G)$ van *hoekpunten* en een eindige verzameling $E(G)$ van *kanten*, waarbij een kant een ongeordend paar van ongelijke hoekpunten is. Je kan een graaf tekenen door voor ieder hoekpunt een punt in het vlak te tekenen, en voor iedere kant de twee corresponderende hoekpunten te verbinden door een lijn. De *graad* $\deg(x)$ van een hoekpunt $x \in V(G)$ is het aantal kanten waartoe het hoekpunt behoort.
- Een *deelgraaf* G' van G is een graaf met $V(G') \subseteq V(G)$ en $E(G') \subseteq E(G)$. Voor $x \in V(G)$ is $G - x$ bij definitie de deelgraaf van G met $V(G - x) := V(G) - \{x\}$ en als kanten precies alle kanten uit $E(G)$ die x niet bevatten. Voor $e \in E(G)$ is $G - e$ bij definitie de deelgraaf van G met $V(G - e) := V(G)$ en $E(G - e) := E(G) - \{e\}$.
- Een *pad van x_1 naar x_r* is een deelgraaf P van G van de vorm $V(P) = \{x_1, \dots, x_r\}$ met $E(P) = \{\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \dots, \{x_{r-1}, x_r\}\}$ (met alle kanten verschillend).
- Een pad is een *cykel* als $x_r = x_1$.
- Een *boom* is een graaf zonder cykels.
- Een graaf is *samenhangend* als er voor ieder paar hoekpunten x, y er een een pad is van x naar y in G.

[2]De *samenhangingscomponenten* van een graaf zijn de maximale samenhangende deelgrafen.



Faculty of Science

Knap staaltje denkwerk

Weet jij al wat je gaat doen na je bachelor? Wil jij...

... zelf bepalen hoe je master er uit komt te zien? (0 verplichte vakken!)

... je wiskunde ook gebruiken buiten de wetenschappelijke wereld? (Mogelijkheid tot combinatiemasters richting bedrijfsleven, onderwijs of wetenschapscommunicatie.)

... over de grenzen van Nederland heen kijken? (Internationale omgeving, uitwisselingsprogramma's zoals ALGANT voor algebraïci.)

... niet verdwijnen in de massa? (Persoonlijk contact met al je docenten in een kleinschalige opleiding.)

... onderdeel uitmaken van een toonaangevend instituut? (Zowel in de fundamentele als in de toegepaste wiskunde!)

Dan is een wiskunde master aan de Universiteit Leiden iets voor jou!

Kijk voor meer informatie op *www.mastersinleiden.nl/wiskunde*.

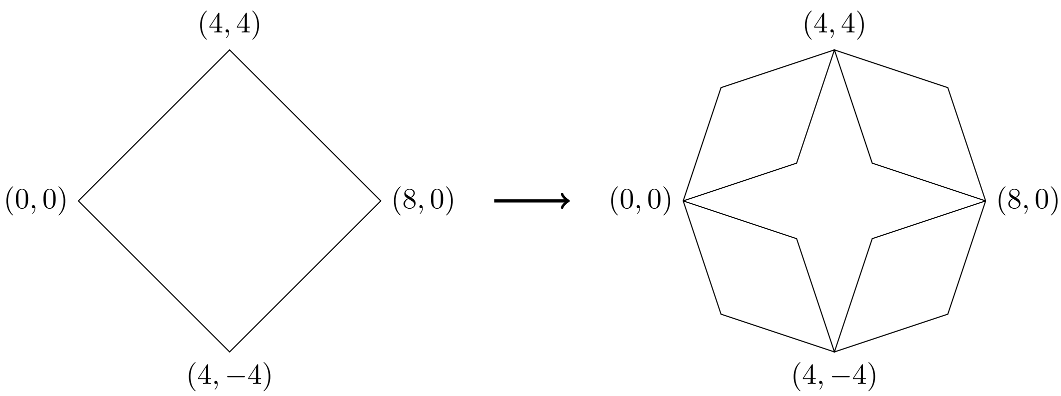
Universiteit Leiden

Bij ons leer je de wereld kennen

4. Vierkant met hoekpunten

Prof. dr. R. (Ronald) Meester, Vrije Universiteit

Beschouw het vierkant met hoekpunten $(0,0),(4,4),(8,0)$ en $(4,-4)$. Laat $p \in (0,1)$ en gooi, voor iedere zijde van het vierkant, een munt die zodanig is ontworpen dat kop boven komt met kans p, en munt met kans $1-p$. Als kop boven komt, laten we de desbetreffende zijde staan, als munt boven komt laten we hem weg. Laat nu $a_1(p)$ de kans zijn dat in de (toevallige) figuur die dan ontstaat, $(0,0)$ nog steeds verbonden is met $(8,0)$.
Stel nu eens dat we niet beginnen met het vierkant zoals boven, maar met een figuur waarin elke zijde van het vierkant vervangen is door twee parallel lopende paden van het begin- naar het eindpunt van de zijde, elk ter lengte 2. Om concreet te zijn: de zijde die van $(0,0)$ naar $(4,4)$ loopt wordt vervangen door vier lijnen: (1) van $(0,0)$ naar $(3,1)$, (2) van $(3,1)$ naar $(4,4)$, (3) van $(0,0)$ naar $(1,3)$, en (4) van $(1,3)$ naar $(4,4)$. Voor de andere zijdes van het oorspronkelijke vierkant doen we hetzelfde. Opnieuw laten we elk van de 16 lijnstukken die we in deze figuur hebben met kans p staan, en gooien we hem met kans $1-p$ weg. We laten $a_2(p)$ de kans zijn dat in de nu verkregen figuur punt $(0,0)$ verbonden is met $(8,0)$.
Op deze manier kunnen we verder gaan, elke keer een lijnstuk vervangend door 4 lijnstukken die tezamen twee parallelle paden ter lengte 2 vormen van het begin- naar het eindpuint van het lijnstuk. Op deze manier definiëren we de kansen $a_n(p)$, voor $n = 1, 2, \ldots$



Opgave: Laat zien dat er een getal $r \in (0,1)$ bestaat zodanig dat

(a) voor alle $p > r$, $\lim_{n\to\infty} a_n(p) = 1$;

(b) voor alle $p < r$, $\lim_{n\to\infty} a_n(p) = 0$;

(c) $\lim_{n\to\infty} a_n(r) \in (0,1)$,

en bepaal de exacte waarde van r.

5. Machten van twee

Prof. dr. H.W. (Hendrik) Lenstra, Universiteit van Amsterdam

Bewijs dat er reële getallen $a_0, a_1, \ldots, a_8$ zijn, niet alle 0, zodanig dat de veelterm $\sum_{i=0}^{8} a_i X^{2^i}$ deelbaar is door $X^8 - X^3 - 1$.

6. Buurloze binaire getallen

dr. G.W.Q. (Quintijn) Puite, Technische Universiteit Eindhoven - Hogeschool Utrecht

In deze opgave bestuderen we een getalstelsel dat lijkt op dat van de binaire getallen, maar dat in twee opzichten anders is. Allereerst mogen de cijfers (bits), behalve $+1$ ("positief aan") en 0 ("uit"), ook -1 ("negatief aan") zijn. Ten tweede mogen er niet twee bits naast elkaar (positief en/of negatief) "aan" staan. Als voorbeeld: het getal 7, dat we gewoonlijk binair schrijven als 111 (of bijvoorbeeld 00000111 als we binaire getallen van 8 bits bekijken), zal nu bijvoorbeeld worden geschreven als $(1, 0, 0, -1)$, dat staat voor $1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 1$. En $(-1, 0, 0, 1)$ staat juist voor -7. In deze opgave voeren we dit getalstelsel formeel in en bewijzen we dat we hiermee *alle* gehele getallen (ook de negatieve dus) uniek kunnen weergeven (op beginnullen na).

De mogelijke bits zijn dus de cijfers -1, 0 en 1. Een rijtje van n bits $(\mu_{n-1}, \mu_{n-2}, \ldots, \mu_1, \mu_0)$ heet *correct* als het voldoet aan de eis dat voor alle $i = 1, 2, \ldots, n-1$ geldt dat $\mu_i = 0$ of $\mu_{i-1} = 0$. Zo is $(0, -1, 0, 0, 1, 0)$ wel een correct rijtje van 6 bits, maar $(-1, 0, 0, 1, -1, 0)$ niet en $(1, 0, 1, 0, 1, 1)$ ook niet.

(a) Bewijs voor alle gehele $n \geq 1$ dat het aantal correcte rijtjes van n bits gelijk is aan $\frac{4}{3} \cdot 2^n - \frac{1}{3} \cdot (-1)^n$.

Aan een correct rijtje van n bits $(\mu_{n-1}, \mu_{n-2}, \ldots, \mu_1, \mu_0)$ kennen we nu het gehele getal $N = \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i 2^i$ toe; we noemen het rijtje dan een *buurloze schrijfwijze* van n bits voor N. Zo zijn $(1, 0, 0, -1)$ en $(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, -1)$ buurloze schrijfwijzes van 4 respectievelijk 8 bits voor het getal 7.

(b) Bewijs voor alle $N \in \mathbb{Z}$ dat er voor voldoend grote $n \geq 1$ precies één buurloze schrijfwijze van n bits voor N is.

7. Lijndans

Dr. ir. T. (Tom) Verhoeff, Technische Universiteit Eindhoven

Een groep dansers staat naast elkaar op een lijn opgesteld. Van hen zijn er N geheel in het wit gekleed, één in het felrood en één in het lichtblauw. Bij hun lijndans beperken de dansbewegingen zich tot het van plaats verwisselen van twee buren op de lijn.
De dansers kunnen op allerlei volgordes op de lijn staan. We letten daarbij alleen op hun kleur. Zo kunnen met $N = 2$ de vier dansers in twaalf volgordes op de lijn staan.
De choreograaf vraagt zich af of het mogelijk is om een lijndans te bedenken waarbij elke volgorde van opstellen precies één keer voorkomt.

(a) Voor welke $N \geq 0$ bestaat zo'n lijndans?

(b) Voor welke $N \geq 0$ bestaat een lijndans waarbij de begin- en eindopstelling ook door een buurwisseling weer in elkaar over zijn te voeren?

Bewijs uw antwoorden.

INFORMATION
www.ru.nl/math

Mathematics (MSc)

The department

The mathematics department currently has 17 staff members and a fluctuating population of about 20 PhD students and postdocs. This relatively small size has considerable advantages for students. You will not drown in a large student pool, and contact with staff and fellow students is pleasant and very easy to make.
We take a highly personal approach!
The combination of local courses and lectures offered by the national Dutch Master Program in Mathematics guarantees a broad and high-level range of topics to choose from.

Career prospects

Practically all of our graduates find employment immediately after graduating, in a very wide range of jobs including business, academia, government and ICT.

Research topics

Our Master's programme is closely related to the research carried out in the Institute for Mathematics, Astrophysics and Particle Physics (IMAPP), and in addition there are close research ties with the institute for Computing and Information Sciences (iCIS) and the Donders Centre for Neuroscience (DCN) at the Radboud University.
Our research is embedded in the national mathematics clusters DIAMANT (websites.math.leidenuniv.nl/diamant/), GQT (www.gqt.nl) and STAR (www.eurandom.tue.nl/STAR/).
As is often the case the research topics are linked to individuals. We invite you to look at www.ru.nl/math for more information.

FOR MORE SPECIFIC INFORMATION
contact Bernd Souvignier: souvi@math.ru.nl

You can choose from the following specializations:

Algebra and Logic

Algebraic and differential topology, algebraic logic, computer algebra in its many forms, complexity theory, affine algebraic geometry, mathematical crystallography. Furthermore, in collaboration with iCIS we offer an exciting interdisciplinary programme in the mathematical foundations of computer science.

Mathematical Physics

Representation theory, symplectic geometry, integrable systems, special functions, topos theory, noncommutative geometry, mathematical foundations of quantum theory, quantum probability, quantum computing, quantum field theory, quantum groups.

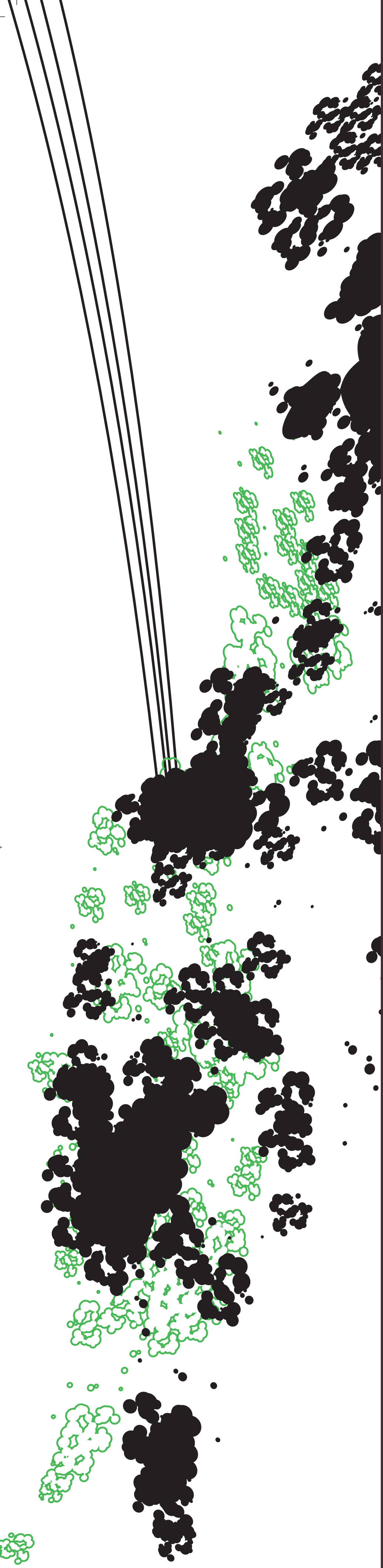
Applied Stochastics

Interacting stochastic systems, i.e. systems consisting of a large number of interacting and stochastically evolving components, with applications to statistical physics (gases and liquids), biology (population dynamics) and neuroscience (self-organized criticality in brain activity, random graph theory, cortical networks).

Personal tutor for a tailor-made programme

Our Master's programme offers you considerable freedom to follow your own interests. At the beginning of the two-year programme, you choose your area of specialization and a personal tutor within that area, with whom you decide what your precise research area and package of courses at both the local and the national level will be. In the second year, you spend most of your time on your MSc dissertation in the research area of your choice. In short, we offer you a tailor-made programme.

Mathematics (MSc)



8. Machtreeksen

Prof. dr. J. (Jaap) Top, Rijksuniversiteit Groningen

Laat m een positief geheel getal zijn. Deze opgave gaat over een $(2^m - 1)$-de-machtswortel van het polynoom $t+1$. Daarbij werken we over $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0,1\}$, met als rekenregels $0+0 = 1+1 = 0$ en $0+1 = 1+0 = 1$ en $0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$ en $1 \cdot 1 = 1$.

De collectie formele machtreeksen over $\mathbb{F}_2$ in de variabele t noteren we als $\mathbb{F}_2[[t]]$. Per definitie zijn deze machtreeksen expressies $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ met alle $a_n \in \mathbb{F}_2$. Zulke machtreeksen tellen we op volgens de regel

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) t^n$$

en we vermenigvuldigen ze als

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}) t^n.$$

Definieer verder S_m als de verzameling van alle gehele getallen $n \geq 0$ waarvoor geldt, dat in de binaire ontwikkeling van n geen enkele macht 2^k met k een positief veelvoud van m voorkomt. Zo geldt bijvoorbeeld $15 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 \notin S_3$, terwijl $17 = 1 + 2^4 \in S_3$.

Tenslotte beschouwen we de machtreeks $w_m \in \mathbb{F}_2[[t]]$ gegeven door

$$w_m := \sum_{n \in S_m} t^n.$$

Toon aan, dat w_m een $(2^m - 1)$-de-machtswortel is van $t+1$.

9. Functies van oneven getallen

S. (Sjoerd) Boersma, Universiteit Utrecht

Zij $X = \{3, 5, 7, 9 \ldots\}$, de verzameling oneven getallen groter dan 2. Noteer met $\mathbb{N}$ de natuurlijke getallen (exclusief nul). Definieer de functie $f : X \cup \{1\} \to \mathbb{N}$ als volgt:

- $f(1) = 1$.
- Voor $x \in X$: deel $(x^2 - 1)$ herhaaldelijk door 2 tot er een oneven getal overblijft. Dat getal is $f(x)$.

(a) Laat zien dat $f(x) = x$ geen oplossingen heeft voor $x \in X$.

(b) Vind alle $x \in X$ waarvoor geldt: $f(x) < x$.

(c) Laat zien dat $f^n(x) = x$ geen oplossingen heeft voor $x \in X, n \in \mathbb{N}$.

UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM

Differentiaalmeetkunde II
Wiskundige logica II
Polaire ruimten
Galoismeetkunde
Lineaire algebraïsche groepen
Banachruimten en Banachalgebra's
Cliffordanalyse
Codeertheorie
Bewijstheorie
Representatietheorie en toepassingen
Eindige meetkunde
Infinitesimale analyse
Differentiaalmeetk. structuren en toepassingen
Algebraïsche topologie en homologe algebra
Faseovergangen in logica en combinatoriek
Transformatieanalyse
Incidentiemeetkunde
Capita selecta in de algebra
Capita selecta in de analyse
Capita selecta in de meetkunde
Partiële differentiaalvergelijkingen
Fysica van galaxieën
Relativiteitstheorie
Astrofysische simulaties
Kwantumveldentheorie
Statistische fysica
Extragalactische sterrenkunde
Wisk. aspecten van algemene relativiteitstheorie
Kosmologie en galaxievorming
Kwantumelektrodynamica
Mechanica van continue media
Inleiding tot de dynamica van atmosferen
Niet-perturbatieve kwantumchromodynamica
Num. methoden voor differentiaalvergelijkingen
Vaagheids- en onzekerheidsmodellen
Computeralgebra
Financiële wiskunde: discrete stoch. modellen
Algoritmische grafentheorie
Berekenbaarheid en complexiteit
Statistische besluitvorming
Stochastische processen
Numerieke lineaire algebra
Financiële wiskunde: continue stoch. modellen
Capita selecta in soft computing
Benaderingsmeth. voor randwaardeproblemen
Causale analyse en missing data
Overlevingsanalyse
Toegepaste functionaalanalyse
Kwalit. oplossingstechn. in wet. modellering
Geschiedenis van de wiskunde

Wiskunde aan UGent

Aan de samenvloeiing van Leie en Schelde ligt de historische stad Gent, de provinciehoofdstad van Oost-Vlaanderen en met 65 000 studenten de grootste Vlaamse studentenstad. De Universiteit Gent is vandaag één van de belangrijkste universiteiten in het Nederlandse taalgebied.

De Gentse universiteit heeft een rijke wiskundige traditie en visitatiecommissies beoordeelden haar bachelor- en masteropleiding wiskunde als uitstekend. De studentenvereniging PRIME zorgt voor een stimulerende dynamiek onder wiskundestudenten.

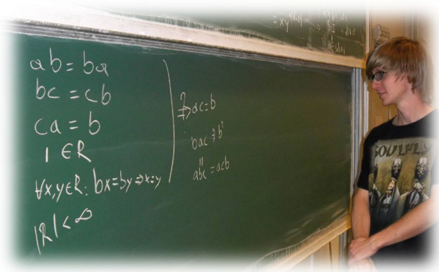
Het masterprogramma wiskunde biedt een grote individuele keuzevrijheid. Naast zuivere en toegepaste wiskunde is er ook een afstudeerrichting wiskundige natuurkunde en sterrenkunde, uniek in Vlaanderen.

Basisvakken (30 ECTS)	**Minor** (30 ECTS)
Zuivere wiskunde of Wisk. natuurkunde en sterrenkunde of Toegepaste wiskunde	Onderwijs of Onderzoek of Economie & verzekeringen
Masterproef (30 ECTS)	**Keuzevakken** (30 ECTS)
Tweede masterjaar	≥18 ECTS wiskundevakken

De gekozen minor bereidt voor op de arbeidsmarkt. Door de minor onderwijs kan de hele theoretische component van de lerarenopleiding in het masterprogramma worden opgenomen. De minor onderzoek staat voor verdiepende specialisatie en laat toe vakken te kiezen uit de lijst links op de pagina. De minor economie en verzekeringen omvat het voorbereidingsprogramma tot de master Actuariële wetenschappen.

Meer weten?

- www.UGent.be
- www.wiskunde.UGent.be
- PRIME.UGent.be



UNIVERSITEIT GENT

www.wiskunde.UGent.be

10. Herondriehoeken

Prof. dr. R. (Rob) Tijdeman, Universiteit Leiden

Een Herondriehoek is een driehoek waarvan zowel de lengte van elke zijde als het oppervlak een positief getal is. Laat A een positief geheel getal zijn. We beschouwen twee Herondriehoeken als gelijk als ze congruent aan elkaar zijn.[1]

(a) Bewijs dat het aantal verschillende Herondriehoeken met oppervlak A eindig is.

(b) Geef een bovengrens voor het aantal verschillende Herondriehoeken met oppervlak ten hoogste A van de vorm CA^3 waarbij C een positieve constante is.

(c) Bewijs dat het aantal verschillende Herondriehoeken met oppervlak ten hoogste A gedeeld door A^3 naar 0 gaat als A naar oneindig gaat.

[1] Als de lengtes van de zijden van de driehoek a, b en c zijn, dan wordt het oppervlak A gegeven door $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ waarbij $2s \equiv a + b + c$.

11. Irreducibele permutaties en hun asymptotisch gedrag

A. (Arne) Smeets, Katholieke Universiteit Leuven

Zij $n \geq 1$ een geheel getal. Zij P_n het aantal permutaties $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ van $\{1, 2, \ldots, n\}$ met de eigenschap dat voor elke m met $1 \leq m < n$ geldt dat $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ géén permutatie is van $\{1, 2, \ldots, m\}$. Zo'n permutatie noemen we *irreducibel*.

(a) Laat zien dat $P_n = n! - \sum_{l=1}^{n-1} P_l \cdot (n-l)!$.

(b) Laat zien dat $\lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{n!} = 1$.

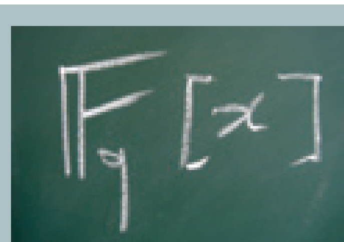
De KU Leuven, gesticht in 1425, is de oudste universiteit van de lage landen. Bijna 6.700 onderzoekers zijn er actief in wetenschappelijk onderzoek en onderwijs. Op 1 februari 2013 telde de KU Leuven in totaal 41.255 ingeschreven studenten. Van de ingeschreven studenten heeft ongeveer 83,7% de Belgische nationaliteit, terwijl 8,4% een andere EU-nationaliteit heeft en nog eens 7,9% van buiten de EU komt. Dit maakt van de gezellige provincie-hoofdstad Leuven een bruisende studentenstad met een rijk sociocultureel aanbod.

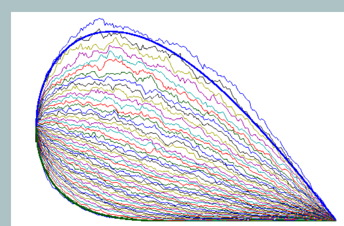
Onderzoek aan het Departement Wiskunde

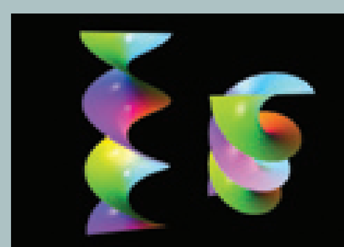
Het onderzoek aan het departement Wiskunde is georganiseerd op het niveau van de onderzoeksafdelingen:

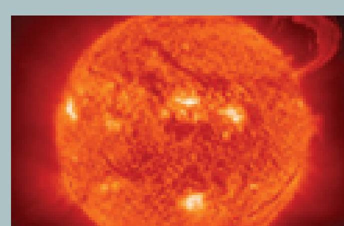
- Afdeling Algebra: het onderzoek situeert zich in de algebraïsche meetkunde, getaltheorie, algebraïsche topologie en groepentheorie.
- Afdeling Analyse: in deze afdeling doet men onderzoek in de klassieke analyse (reële en complexe analyse) en in de functionaalanalyse.
- Afdeling Meetkunde: het onderzoek is gecentreerd rond differentiaalmeetkunde, in het bijzonder Riemannse en pseudo-Riemannse meetkunde en deelvariëteiten.
- Afdeling Plasma-astrofysica: het onderzoeksdomein van deze afdeling is de wiskunde van vloeistoffen en plasma's, het voornaamste studieobject is de zon. Dit onderzoek is gesitueerd in de toegepaste en computationele wiskunde.
- Afdeling Statistiek: deze afdeling is actief in de wiskundige statistiek, in het bijzonder de theorie van extreme waarden, robuuste statistiek en niet-parametrische methoden. Ook stochastische processen en financiële wiskunde komen aan bod. De afdeling is bovendien ook actief in toegepaste consultatie voor bedrijven.

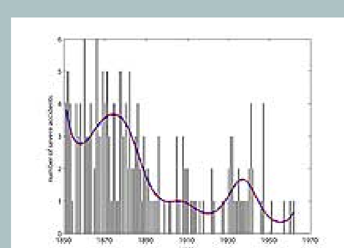
Meer info op http://wis.kuleuven.be











12. $f(2013) = f(2014)$

Prof. dr. G.J. (Gerhard) Woeginger, Technische Universiteit Eindhoven

Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een continue functie zodanig dat voor elk integer $k \geq 1$ het volgende geldt:

$$\int_0^k f^2(x)\ dx \ = \ \int_0^k f(x)f(k-x)\ dx.$$

Bewijs dat $f(2013) = f(2014)$.